数理解析研究所講究録
第 1877 巻 2014 年 121-134

A construction of graded Lie algebras

九州大学大学院数理学府
佐々野詠淑
Nagatoshi Sasano
Faculty of Mathematics, Kyushu University

1 はじめに

G を半単純代数群で, その Lie 代数が有限次元半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ であるとする. $\mathfrak{g}$ に次数付け $\mathfrak{g}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_n$ が与えられているとするとき, G_0 を $\mathfrak{g}_0$ に対応する G の連結な部分代数群とすると, G_0 は各 $\mathfrak{g}_i$ に自然に作用する. このとき, 特に $i\neq 0$ であれば, 三つ組 $(G_0, \mathrm{Ad}, d_i(\theta))$ は概均質ベクトル空間になることが知られている.

Rubenthaler はこの形の空間を研究し, 放物型概均質ベクトル空間と呼んだ. これは Dynkin 図形を使って記述され, 完全に分類されている. 言い換えれば, 次数付けられた半単純 Lie 代数に埋め込まれる簡約可能 Lie 代数およびその表現が, 完全に分類されたことになる.

本稿では, 逆に与えられた有限次元簡約可能 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ およびその有限次元完全可約表現 (ρ, V) に対し, それらを埋め込むことができるような大きな次数つき Lie 代数を構成する方法を紹介する. そのために $\mathfrak{g}$ 上の非退化対称不変二次形式 B_0 を利用する方法を紹介する. よく知られているように, 有限次元簡約可能 Lie 代数は非退化対称不変二次形式をもつ. (例えば, $\mathfrak{g}$ が単純 Lie 代数の場合では Killing 形式のスカラー倍がそれにあたる.) 従って, 本稿では主に四つ組 $(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ を考察の対象とするが, 次節でそれを詳述する.

また, 我々は対象とする簡約可能 Lie 代数およびその有限次元完全可約表現に概均質性などの条件は仮定しない. そのため, 埋め込む先の次数つき Lie 代数は一般に無限次元になる.

本稿では特に断らない限り, Lie 代数やその表現は全て複素数体上で定義されているものとする.

2 standard quadrupletsに付随するLie代数

先に述べたように本稿では主に有限次元簡約可能Lie代数$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$の有限次元完全可約表現(ρ, V), $\mathfrak{g}$上の非退化対称不変二次形式B_0からなる四つ組を扱う. その中でもどのような四つ組を扱うか, 最初に以下の定義をしよう.

Definition 2.1. $(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$が以下の条件を満たすとき, この四つ組をstandard quadrupletと呼ぶ.

$$\cdot\rho\text{が忠実な表現であること,} \tag{2.1}$$

$$\cdot\rho\text{が完全可約な表現であること,} \tag{2.2}$$

$$\cdot\rho\text{は部分表現として}\{0\}\text{でない}V\text{の部分空間へ0-表現をもたない.} \tag{2.3}$$

すなわち, 作用するLie代数と表現空間からそれぞれ無駄な部分を取り除いたものがstandard quadrupletである. 簡約可能Lie代数とその有限次元完全可約表現を考えるとき, Definition 2.1の三条件を仮定しても一般性は失われない. まず, standard quadruplet $(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$から$\mathfrak{g}$-加群の列を構成しよう. そのために次の線形写像を定義する.

Definition 2.2. $v \in V$, $\phi \in V^*$とする. 次の六つの線形写像

$$\hat{\Phi} : V \otimes V^* \to \mathfrak{g}, \qquad \Phi_v : V^* \to \mathfrak{g}, \qquad \Phi : V \to \mathrm{Hom}(V^*, \mathfrak{g}),$$
$$\hat{\Psi} : V^* \otimes V \to \mathfrak{g}, \qquad \Psi_\phi : V \to \mathfrak{g}, \qquad \Psi : V^* \to \mathrm{Hom}(V, \mathfrak{g})$$

を, 任意の$a \in \mathfrak{g}$, $u \in V$, $\psi \in V^*$に対して

$$B_0(a, \Phi(u \otimes \psi)) = \langle \rho(a)u, \psi \rangle, \qquad \Phi_v(\psi) = \hat{\Phi}(v \otimes \psi), \qquad \Phi(u) = \Phi_u,$$
$$B_0(a, \Psi(\psi \otimes u)) = \langle u, \rho^*(a)\psi \rangle, \qquad \Psi_\phi(v) = \hat{\Psi}(\psi \otimes u), \qquad \Psi(\psi) = \Psi_\psi$$

が成り立つものとして定義する. ただし, $\langle \cdot, \cdot \rangle$で$V$と$V^*$の間のpairingを表す.

$V \otimes V^*$や$\mathrm{Hom}(V^*, \mathfrak{g})$などは自然に$\mathfrak{g}$-加群としての構造を持ち, $\hat{\Phi}$, $\hat{\Psi}$, Φ, Ψはいずれも$\mathfrak{g}$-加群の準同型写像である. また, $(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$がstandard quadrupletであるとき, ΦとΨは単射になる. 従って,

$$V_1 := \mathrm{Im}\ \Phi, \quad V_{-1} := \mathrm{Im}\ \Psi$$

とおき, その上の表現をρ_1, ρ_{-1}とかけば, (ρ_1, V_1)と(ρ_{-1}, V_{-1})はそれぞれ(ρ, V)と(ρ^*, V^*)に同型である. さらに, $V_0 := \mathfrak{g}$とおき, adjoint表現をρ_0と書けば, 以下の

写像

$$p_0 : V_1 \otimes V_0 \to V_1 \qquad\qquad q_0 : V_{-1} \otimes V_0 \to V_{-1}$$
$$v_1 \otimes a \mapsto -\rho_1(a)v_1 \qquad\qquad \phi_{-1} \otimes a \mapsto -\rho_{-1}(a)\phi_{-1}$$

は $\mathfrak{g}$-加群の全射準同型である．こうして得られた $V_0, V_{\pm 1}$ から新たな $\mathfrak{g}$-加群の列 $V_{\pm 2}, V_{\pm 3}, \ldots$ を以下のように構成しよう．

Definition 2.3. $(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ を standard quadruplet とする．自然数 $i \geq 1$ に対し，$\mathfrak{g}$-加群 (ρ_{i-1}, V_{i-1}) と (ρ_{-i+1}, V_{-i+1})，$\mathfrak{g}$-加群の 準同型写像 $p_{i-1} : V_1 \otimes V_{i-1} \to \mathrm{Hom}(V^*, V_{i-1})$ と $q_{-i+1} : V_{-1} \otimes V_{-i+1} \to \mathrm{Hom}(V, V_{-i+1})$ が与えられているとする．このとき，$V_i := \mathrm{Im}\ p_{i-1}$，$V_{-i} := \mathrm{Im}\ q_{-i+1}$ とおくと，以下のような写像 p_i，q_{-i} が定義できる:

$$\begin{aligned} p_i : V_1 \otimes V_i &\to \mathrm{Hom}(V^*, V_i) \\ v_1 \otimes u_i &\mapsto \big(\phi \mapsto \rho_i\big(v_1(\phi)\big)u_i + p_{i-1}\big(v_1 \otimes u_i(\phi)\big)\big), \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} q_{-i} : V_{-1} \otimes V_{-i} &\to \mathrm{Hom}(V, V_{-i}) \\ \phi_{-1} \otimes \psi_{-i} &\mapsto \big(v \mapsto \rho_{-i+1}\big(\phi_{-1}(v)\big)\psi_{-i} + q_{-i+1}\big(\phi_{-1} \otimes \psi_{-i}(v)\big)\big). \end{aligned} \tag{2.5}$$

p_i と q_{-i} は $\mathfrak{g}$-加群としての準同型写像であり，それらの像をそれぞれ $V_{i+1} := \mathrm{Im}\ p_i$，$V_{-i-1} := \mathrm{Im}\ q_{-i}$ とかくと，これらは $\mathfrak{g}$-加群の構造を持つ．V_{i+1}，V_{-i-1} 上の表現をそれぞれ ρ_{i+1}，ρ_{-i-1} とし，再び同じ方法で $p_i : V_1 \otimes V_i \to \mathrm{Hom}(V^*, V_i)$ と $q_{-i} : V_{-1} \otimes V_{-i} \to \mathrm{Hom}(V, V_{-i})$ を定義することによって，すべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して帰納的に $\mathfrak{g}$-加群 (ρ_n, V_n) を構成することができる．これを $(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ の n-**graduation** と呼ぶ．

これらの $\mathfrak{g}$-加群の直和を $L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ で書く．実は $L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ が次数つき Lie 代数の構造を持つのだが，この節の残りの部分でこのことを確かめよう．そのために，$L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ 上に bracket 積を定義する．すなわち，双線形写像 $[\cdot, \cdot] : L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0) \times L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0) \to L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ を定義し，それが Lie 代数の条件を満たすことを確かめればよいのだが，まず次の双線形写像を定義する．

Definition 2.4. 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して，双線形写像

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]_n^0 &: V_0 \times V_n \to V_n, \\ [\cdot, \cdot]_n^1 &: V_1 \times V_n \to V_{n+1}, \\ [\cdot, \cdot]_n^{-1} &: V_{-1} \times V_n \to V_{n-1} \end{aligned}$$

を

$$\left[a, x_n\right]_n^0 := \rho_n(a)x_n, \tag{2.6}$$

$$\left[v_1, x_n\right]_n^1 := \begin{cases} p_n(v_1 \otimes x_n) & (n \geq 0) \\ -x_n\big(\Phi^{-1}(v_1)\big) & (n \leq -1) \end{cases}, \tag{2.7}$$

$$\left[\phi_{-1}, x_n\right]_n^{-1} := \begin{cases} -x_n\big(\Psi^{-1}(\phi_{-1})\big) & (n \geq 1) \\ q_n(\phi_{-1} \otimes x_n) & (n \leq 0) \end{cases} \tag{2.8}$$

によって定義する.

これらの写像は明らかに任意の $i, j \geq 0$ に対して,

$$\left[V_1, V_i\right]_i^1 = V_{i+1}, \quad \left[V_{-1}, V_{-j}\right]_{-j}^{-1} = V_{-j-1}$$

を満たす. また, 任意の $v_1 \in V_1$, $\phi_{-1} \in V_{-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, $x_n \in V_n$ に対して

$$\left[\phi_{-1}, \left[v_1, x_n\right]_n^1\right]_{n+1}^{-1} = \left[\left[\phi_{-1}, v_1\right]_1^{-1}, x_n\right]_n^0 + \left[v_1, \left[\phi_{-1}, x_n\right]_n^{-1}\right]_{n-1}^1 \tag{2.9}$$

が成り立つ.

次に, 任意の $i \geq 2$ に対し, 双線形写像 $\left[\cdot,\cdot\right]_n^{\pm i} : V_{\pm i} \times V_n \to V_{\pm i+n}$ を定義しよう. そのために, 次の命題を示そう.

Proposition 2.5. $i \geq 0$ とする. 任意の $n \in \mathbb{Z}$ と i 以下の非負整数 j に対して双線形写像 $\left[\cdot,\cdot\right]_n^j : V_j \times V_n \to V_{j+n}$ が定義され, 以下の五条件を満たすとする:

$$\left[a, \left[u_j, x_n\right]_n^j\right]_{j+n}^0 = \left[\left[a, u_j\right]_j^0, x_n\right]_n^j + \left[u_j, \left[a, x_n\right]_n^0\right]_n^j, \tag{2.10}$$

$$\left[\phi_{-1}, \left[u_j, x_n\right]_n^j\right]_{j+n}^{-1} = \left[\left[\phi_{-1}, u_j\right]_j^{-1}, x_n\right]_n^{j-1} + \left[u_j, \left[\phi_{-1}, x_n\right]_n^{-1}\right]_{n-1}^j, \tag{2.11}$$

$$\left[u_j, a\right]_0^j = -\left[a, u_j\right]_j^0 = -\rho_j(a)u_j, \tag{2.12}$$

$$\left[u_j, v_1\right]_1^j = -\left[v_1, u_j\right]_j^1 = -p_j(v_1 \otimes u_j), \tag{2.13}$$

$$\left[u_j, \phi_{-1}\right]_{-1}^j = -\left[\phi_{-1}, u_j\right]_j^{-1}. \tag{2.14}$$

ただし, $a \in V_0$, $v_1 \in V_1$, $u_j \in V_j$, $\phi_{-1} \in V_{-1}$, $x_n \in V_n$ である. このとき,

$$\sum_{s=1}^{l} p_i(v_1^s \otimes u_i^s) = 0 \tag{2.15}$$

を満たす $v_1^1, \ldots, v_1^l \in V_1$, $u_i^1, \ldots, u_i^l \in V_i$ と任意の $x_n \in V_n$ に対して

$$\sum_{s=1}^{l} \left(\left[v_1^s, \left[u_i^s, x_n\right]_n^i\right]_{i+n}^1 - \left[u_i^s, \left[v_1^s, x_n\right]_n^1\right]_{n+1}^i \right) = 0 \tag{2.16}$$

が成り立つ. したがって,

$$\left[p_i(v_1 \otimes u_i), x_n\right]_n^{i+1} := \left[v_1, \left[u_i, x_n\right]_n^i\right]_{i+n}^1 - \left[u_i, \left[v_1, x_n\right]_n^1\right]_{n+1}^i \tag{2.17}$$

によって双線形写像 $[\cdot,\cdot]_n^{i+1} : V_{i+1} \times V_n \to V_{i+n+1}$ が定義できるが, これは (2.10) から (2.14) と同様な以下の五条件を満たす:

$$\left[a, \left[u_{i+1}, x_n\right]_n^{i+1}\right]_{i+n+1}^0 = \left[\left[a, u_{i+1}\right]_{i+1}^0, x_n\right]_n^{i+1} + \left[u_{i+1}, \left[a, x_n\right]_n^0\right]_n^{i+1}, \tag{2.18}$$

$$\left[\phi_{-1}, \left[u_{i+1}, x_n\right]_n^{i+1}\right]_{i+n+1}^{-1} = \left[\left[\phi_{-1}, u_{i+1}\right]_{i+1}^{-1}, x_n\right]_n^i + \left[u_{i+1}, \left[\phi_{-1}, x_n\right]_n^{-1}\right]_{n-1}^{i+1}, \tag{2.19}$$

$$\left[u_{i+1}, a\right]_0^{i+1} = -\left[a, u_{i+1}\right]_{i+1}^0 = -\rho_{i+1}(a)u_{i+1}, \tag{2.20}$$

$$\left[u_{i+1}, v_1\right]_1^{i+1} = -\left[v_1, u_{i+1}\right]_{i+1}^1 = -p_{i+1}(v_1 \otimes u_{i+1}), \tag{2.21}$$

$$\left[u_{i+1}, \phi_{-1}\right]_{-1}^{i+1} = -\left[\phi_{-1}, u_{i+1}\right]_{i+1}^{-1} = u_{i+1}\left(\Psi^{-1}(\phi_{-1})\right). \tag{2.22}$$

ただし, $a \in V_0$, $v_1 \in V_1$, $u_{i+1} \in V_{i+1}$, $\phi_{-1} \in V_{-1}$, $x_n \in V_n$ である.

Proposition 2.5 で $i = 0$ のとき, すなわち, Definition 2.4 で定義した $[\cdot,\cdot]_n^0$, $[\cdot,\cdot]_n^1$, $[\cdot,\cdot]_n^{-1}$ に対して命題の主張は正しい. 従って, $[\cdot,\cdot]_n^2 : V_2 \times V_n \to V_{n+2}$ が定義できる. 以下同様にして, 帰納的に双線形写像 $[\cdot,\cdot]_n^i : V_i \times V_n \to V_{i+n}$ がすべての $i \geq 0$ に対して定義できる.

Proof. この命題は i に関する帰納法によって証明することができる. $i = 0$ の場合は先に述べたように, 定義から直接計算によって確かめられる.

$i \geq 1$ としよう. n が非負である場合と負である場合に分けて証明する.

まず, $n = 0$ のとき, (2.12) と (2.13) を使うと,

$$\begin{aligned} &\left[v_1, \left[u_i, x_0\right]_0^i\right]_i^1 - \left[u_i, \left[v_1, x_0\right]_0^1\right]_1^i \\ &= -\rho_{i+1}(x_0)p_i(v_1 \otimes u_i) \end{aligned} \tag{2.23}$$

を得る. 従って, 主張の前半部分が成り立つ.

次に $n \geq 1$ とすると, 任意の $v_1 \in V_1$, $u_i \in V_i$, $x_n \in V_n$, $\phi \in V^*$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\big[v_1, [u_i, x_n]^i_n\big]^1_{i+n}(\phi) - \big[u_i, [v_1, x_n]^1_n\big]^i_{n+1}(\phi) \\
=&p_{i+n}\big(v_1 \otimes [u_i, x_n]^i_n\big)(\phi) - \big[u_i(\phi), p_n\big(v_1 \otimes x_n\big)\big]^{i-1}_{n+1} - \big[u_i, p_n\big(v_1 \otimes x_n\big)(\phi)\big]^i_n \\
\cdots& \\
=&\big[p_i\big(v_1 \otimes u_i\big)(\phi), x_n\big]^i_n \\
&+ \big[v_1, [u_i, x_n(\phi)]^i_{n-1}\big]^1_{i+n-1} - \big[u_i, [v_1, x_n(\phi)]^1_{n-1}\big]^i_n
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

を得る. 従って, $v_1^1, \ldots, v_1^l \in V_1$, $u_i^1, \ldots, u_i^l \in V_i$ と任意の $x_n \in V_n$ が

$$
\sum_{s=1}^{l} p_i(v_1^s \otimes u_i^s) = 0
$$

を満たすとき, i および n についての帰納法の仮定から

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{l} \big[p_i\big(v_1^s \otimes u_i^s\big)(\phi), x_n\big]^i_n = 0, \\
&\sum_{s=1}^{l} \Big(\big[v_1^s, [u_i^s, x_n(\phi)]^i_{n-1}\big]^1_{n+i-1} - \big[u_i^s, [v_1^s \otimes x_n(\phi)]^1_{n-1}\big]^i_n\Big) = 0
\end{aligned}
$$

が成り立つから,

$$
\sum_{s=1}^{l} \Big(\big[v_1^s, [u_i^s, x_n]^i_n\big]^1_{i+n} - \big[u_i^s, [v_1^s, x_n]^1_n\big]^i_{n+1}\Big) = 0
\tag{2.25}
$$

を得る.

$n = -1$ のとき, i についての帰納法の仮定から, 任意の $v_1 \in V_1$, $u_i \in V_i$, $x_{-1} \in V_{-1}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\big[v_1, [u_i, x_{-1}]^i_{-1}\big]^1_{i-1} - \big[u_i, [v_1, x_{-1}]^1_{-1}\big]^i_0 \\
=&\big[v_1, u_i\big(\Psi^{-1}(x_{-1})\big)\big]^1_{i-1} - \big[u_i, v_1\big(\Psi^{-1}(x_{-1})\big)\big]^i_0 \\
=&p_{i-1}\big(v_1 \otimes u_i\big(\Psi^{-1}(x_{-1})\big)\big) + \rho_i\big(v_1\big(\Psi^{-1}(x_{-1})\big)\big)u_i \\
=&p_i(v_1 \otimes u_i)\big(\Psi^{-1}\big(x_{-1}\big)\big)
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

を得る. 従って, 主張の前半部分が成り立つ.

$n \leq -2$ のとき, (2.9) と i についての帰納法の仮定より, 任意の $v_1 \in V_1$, $u_i \in V_i$,

$x_n \in V_n$, $\phi_{-1} \in V_{-1}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\big[v_1, \big[u_i, q_{n+1}(\phi_{-1} \otimes x_{n+1})\big]_n^i\big]_{i+n}^1 - \big[u_i, \big[v_1, q_{n+1}(\phi_{-1} \otimes x_{n+1})\big]_n^1\big]_{n+1}^i \\
=&\big[v_1, \big[u_i\big(\Psi^{-1}(\phi_{-1})\big), x_{n+1}\big]_{n+1}^{i-1}\big]_{i+n}^1 + \big[v_1, \big[\phi_{-1}, \big[u_i, x_{n+1}\big]_{n+1}^i\big]_{i+n+1}^{-1}\big]_{i+n}^1 \\
&+ \big[u_i, q_{n+1}(\phi_{-1} \otimes x_{n+1})\big(\Phi^{-1}(v_1)\big)\big]_{n+1}^i \\
\cdots& \\
=&\big[p_i(v_1 \otimes u_i)\big(\Psi^{-1}(\phi_{-1})\big), x_{n+1}\big]_{n+1}^i \\
&+ \Big[\phi_{-1}, \Big(\big[v_1, \big[u_i, x_{n+1}\big]_{n+1}^i\big]_{i+n+1}^1 - \big[u_i, [v_1, x_{n+1}]_{n+1}^1\big]_{n+2}^i\Big)\Big]_{i+n+2}^{-1}
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

を得る. 従って, $v_1^1, \ldots, v_1^l \in V_1$, $u_i^1, \ldots, u_i^l \in V_i$ と任意の $x_n \in V_n$ が

$$
\sum_{s=1}^{l} p_i(v_1^s \otimes u_i^s) = 0
$$

を満たすとき, i および n についての帰納法の仮定から

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{l} \big[p_i(v_1^s \otimes u_i^s)\big(\Psi^{-1}(\phi_{-1})\big), x_{n+1}\big]_{n+1}^i = 0, \\
&\sum_{s=1}^{l} \Big[\phi_{-1}, \Big(\big[v_1^s, \big[u_i^s, x_{n+1}\big]_{n+1}^i\big]_{i+n+1}^1 - \big[u_i^s, [v_1^s, x_{n+1}]_{n+1}^1\big]_{n+2}^i\Big)\Big]_{i+n+2}^{-1} = 0
\end{aligned}
$$

が成り立つから,

$$
\sum_{s=1}^{l} \Big(\big[v_1^s, \big[u_i^s, q_{n+1}(\phi_{-1} \otimes x_{n+1})\big]_n^i\big]_{i+n}^1 - \big[u_i^s, \big[v_1^s, q_{n+1}(\phi_{-1} \otimes x_{n+1})\big]_n^1\big]_{n+1}^i\Big) = 0
\tag{2.28}
$$

を得る. 以上をまとめて, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して well-defined な双線形写像 $[\cdot,\cdot]_n^{i+1} : V_{i+1} \times V_n \to V_{i+n+1}$ を得ることができた.

この $[\cdot,\cdot]_n^{i+1}$ が (2.18) から (2.22) の条件を満たすことは容易に確かめられる. ∎

命題2.5 と同様に, 任意の非負整数 j に対して, 双線形写像 $[\cdot,\cdot]_n^{-j-1} : V_{-j-1} \times V_n \to V_{-j+n-1}$ を

$$
\big[q_{-j}(\phi_{-1} \otimes \psi_{-j}), x_n\big]_n^{-j-1} := \big[\phi_{-1}, \big[\psi_{-j}, x_n\big]_n^{-j}\big]_{-j+n}^{-1} - \big[\psi_{-j}, \big[\phi_{-1}, x_n\big]_n^{-1}\big]_{n-1}^{-j}
\tag{2.29}
$$

によって帰納的に定義することができる. 以上より, すべての $n, m \in \mathbb{Z}$ に対して双線形写像 $[\cdot,\cdot]_m^n : V_n \times V_m \to V_{n+m}$ が得られた. これを使って, $L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ 上に双

線形写像 $[\cdot,\cdot]$ を

$$[x_n, y_m] := [x_n, y_m]^n_m \quad (x_n \in V_n, y_m \in V_m)$$

によって定義しよう. この $[\cdot,\cdot]$ は任意の $x, y, z \in L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ に対して, 関係式

$$\begin{aligned}&[x, y] + [y, x] = 0,\\&[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]\end{aligned}$$

を満たす. 従って, 次の定理を得る.

Theorem 2.6. $L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ は $[\cdot,\cdot]$ を bracket 積とする Lie 代数の構造を持つ. これを **standard quadruplet に付随する Lie 代数**と呼ぶ.

こうして構成された Lie 代数 $L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ は次の性質を持つ:

$$[V_1, V_i] = V_{i+1}, \quad [V_{-1}, V_{-j}] = V_{-j-1}, \quad (i, j \geq 0) \tag{2.30}$$

$$[V_1, V_{-1}] = V_0. \tag{2.31}$$

3 $L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ 上の二次形式

次に $L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ に非退化対称不変二次形式を定義しよう.

Definition 3.1. 双線形写像 $B_1 : V_1 \times V_{-1} \to \mathbb{C}$ を

$$B_1(v_1, \phi_{-1}) := \langle \Phi^{-1}(v_1), \Psi^{-1}(\phi_{-1}) \rangle \tag{3.1}$$

によって定義する. この B_1 は任意の $a, b \in V_0$, $v_1, u_1 \in V_1$, $\phi_{-1}, \psi_{-1} \in V_{-1}$ に対して

$$\begin{aligned}\cdot B_1(p_1(v_1 \otimes a), q_{-1}(\phi_{-1} \otimes b)) =& B_0(p_1(v_1 \otimes a)(\Phi^{-1}(\psi_{-1})), b)\\ =& B_0(a, q_{-1}(\phi_{-1} \otimes b)(\Phi^{-1})(v_1)),\\ \cdot B_1(p_1(v_1 \otimes u_1)(\Psi^{-1}(\phi_{-1})), \psi_{-1}) =& B_1(u_1, q_{-1}(\phi_{-1} \otimes \psi_{-1})(\Phi^{-1}(v_1)))\end{aligned}$$

が成り立つ.

自然数 $i \geq 2$ に対して双線形写像 $B_{i-1} : V_{i-1} \times V_{-i+1} \to \mathbb{C}$ が与えられていて, 関係式

$$\begin{aligned}&B_{i-1}\big(p_{i-1}\big(v_1 \otimes u_{i-1}\big)\big(\Psi^{-1}(\phi_{-1})\big), \psi_{-i+1}\big)\\ =&B_{i-1}\big(u_{i-1}, q_{-i+1}\big(\phi_{-1} \otimes \psi_{-i+1}\big)\big(\Phi^{-1}(v_1)\big)\big)\end{aligned} \tag{3.2}$$

を満たすとしよう．このとき，双線形写像 $B_i : V_i \times V_{-i} \to \mathbb{C}$ を

$$\begin{aligned}&B_i\bigl(p_{i-1}(v_1 \otimes u_{i-1}), q_{-i+1}(\phi_{-1} \otimes \psi_{-i+1})\bigr)\\ :=&B_{i-1}\bigl(p_{i-1}\bigl(v_1 \otimes u_{i-1}\bigr)\bigl(\Psi^{-1}(\phi_{-1})\bigr), \psi_{-i+1}\bigr)\end{aligned}$$

によって定義する．これは well-defined であり，任意の $v_1 \in V_1$, $u_i \in V_i$, $\phi_{-1} \in V_{-1}$, $\psi_{-i} \in V_{-i}$ に対して同様の関係式

$$\begin{aligned}&B_i\bigl(p_i\bigl(v_1 \otimes u_i\bigr)\bigl(\Psi^{-1}(\phi_{-1})\bigr), \psi_{-i}\bigr)\\ =&B_i\bigl(u_i, q_{-i}\bigl(\phi_{-1} \otimes \psi_{-i}\bigr)\bigl(\Phi^{-1}(v_1)\bigr)\bigr)\end{aligned}$$

を満たす．かくして，すべての自然数 j に対し，双線形写像 $B_j : V_j \times V_{-j} \to \mathbb{C}$ が帰納的に定義できる．また，これらから $L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ 上の二次形式 B が以下のように定義できる．

$$B\bigl(\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n, \sum_{m\in\mathbb{Z}} y_m\bigr) = \sum_{s\geq 0} B_s\bigl(x_s, y_{-s}\bigr) + \sum_{t\leq -1} B_{-t}\bigl(y_{-t}, x_t\bigr) \tag{3.3}$$

Proposition 3.2. Definition 3.1 で定義された B は $L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ 上の非退化対称不変二次形式である．

逆に，これらの性質が standard quadruplet に付随する Lie 代数の特徴づけを与える．すなわち，普遍性に関して次の命題が成り立つ．

Proposition 3.3. 非退化対称不変二次形式 $\hat{B}$ をもつ次数つき Lie 代数 $\hat{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\mathfrak{g}}_n$ が次の五条件を満たすとする．このとき，$(\hat{\mathfrak{g}}_0, \mathrm{ad}, \hat{\mathfrak{g}}_1, \hat{B}_0|_{\hat{\mathfrak{g}}_0\times\hat{\mathfrak{g}}_0})$ は standard quadruplet であり，それに付随する Lie 代数は $\hat{\mathfrak{g}}$ に同型である．

$$\hat{\mathfrak{g}}_0, \hat{\mathfrak{g}}_1 \text{ は有限次元ベクトル空間である,} \tag{3.4}$$
$$\hat{\mathfrak{g}}_0 \text{ の } \hat{\mathfrak{g}}_1 \text{ 上の adjoint 表現は完全可約である,} \tag{3.5}$$
$$\text{各 } i \geq 0 \text{ に対して, } \hat{B} \text{ の } \hat{\mathfrak{g}}_i \times \hat{\mathfrak{g}}_{-i} \text{ への制限は非退化である,} \tag{3.6}$$
$$\text{各 } i, j \geq 0 \text{ について } [\hat{\mathfrak{g}}_1, \hat{\mathfrak{g}}_i] = \hat{\mathfrak{g}}_{i+1},\ [\hat{\mathfrak{g}}_{-1}, \hat{\mathfrak{g}}_{-j}] = \hat{\mathfrak{g}}_{-j-1} \text{ が成り立つ,} \tag{3.7}$$
$$[\hat{\mathfrak{g}}_1, \hat{\mathfrak{g}}_{-1}] = \hat{\mathfrak{g}}_0 \text{ が成り立つ.} \tag{3.8}$$

4 いくつかの例

この節では，Proposition 3.3 を応用していくつかの例を紹介しよう．まず，standard quadruplet の間に次の同値関係を定義する．

Definition 4.1. $(\mathfrak{g}^1, \rho^1, V^1, B_0^1)$ と $(\mathfrak{g}^2, \rho^2, V^2, B_0^2)$ を２つの standard quadruplets とする．Lie 代数の同型写像 $\sigma : \mathfrak{g}^1 \to \mathfrak{g}^2$ と線形同型写像 $\tau : V^1 \to V^2$ が存在し，任意の $a^1, b^1 \in \mathfrak{g}^1$, $v^1 \in V^1$ に対して関係式

$$\tau\big(\rho^1(a^1)v^1\big) = \rho^2\big(\sigma(a^1)\big)\big(\tau(v^1)\big), \tag{4.1}$$

$$B_0^1(a^1, b^1) = B_0^2(\sigma(a^1), \sigma(b^1)) \tag{4.2}$$

を満たすとき，この２つの standard quadrupley は同値であるという．また，これを

$$(\mathfrak{g}^1, \rho^1, V^1, B_0^1) \simeq (\mathfrak{g}^2, \rho^2, V^2, B_0^2) \tag{4.3}$$

という記号で表す．

Proposition 4.2. 同値な standard quadruplet に付随する Lie 代数は同型である．ただし，逆は必ずしも成り立たない．

Example 4.3. (loop 代数) $\mathfrak{g}$ を単純 Lie 代数，K を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式とする．$\mathcal{L}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{g}$ とおき，その上の bracket 積 $[\cdot,\cdot]_0$ を

$$[t^n \otimes X, t^m \otimes Y]_0 := t^{n+m} \otimes [X, Y] \tag{4.4}$$

$$\mathfrak{g}_n := \mathbb{C}t^n \otimes \mathfrak{g} \tag{4.5}$$

で定義すると，$\mathcal{L}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$ は loop 代数と呼ばれる次数つき Lie 代数である．また，その上の非退化対称不変二次形式 K_0 を

$$K_0(t^n \otimes X, t^m \otimes Y) = \delta_{n+m,0} K(X, Y)$$

と定義すると，$\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ と K_0 は明らかに Proposition 3.3 の条件を満たす． 従って，$(\mathfrak{g}_0, \mathrm{ad}, \mathfrak{g}_1, K_0|_{\cdot_0 \times \cdot_0})$ は standard quadruplet であり，これは $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad}, \mathfrak{g}, K)$ に同値である．さらに，

$$L(\mathfrak{g}, \mathrm{ad}, \mathfrak{g}, K) \simeq \mathcal{L}(\mathfrak{g})$$

を得る．

次に有限次元単純 Lie 代数を standard quadruplet に付随する Lie 代数として構成しよう．$\mathfrak{g}$ を単純 Lie 代数，$\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分代数，R を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対する root 系とする．R の基本系 ψ を一つとって固定する．すると，任意の ψ の真部分集合 θ (空集合でもかまわない) に対して，$\mathfrak{h}$ の元 H^θ で

$$\alpha(H^\theta) = \begin{cases} 0 & (\alpha \in \theta) \\ 2 & (\alpha \in \psi \setminus \theta) \end{cases} \tag{4.6}$$

を満たすものがただ一つ存在する．このとき，

$$d_i(\theta) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H^\theta, X] = 2iX\}$$

とすると，任意の非負整数 i に対して $d_{i+1}(\theta) = [d_1(\theta), d_i(\theta)]$, $[d_{-1}(\theta), d_1(\theta)] = d_0(\theta)$ が成り立ち，$\mathfrak{g}$ は $d_i(\theta)$ たちの直和である．また，$\mathfrak{g}$ は有限次元であるから，$d_k(\theta) \neq \{0\}$, $d_{k+1}(\theta) = \{0\}$ となる $k \geq 1$ が存在する．さらに，$\mathfrak{g}$ の Killing 形式を K とかくと，Killing 形式の定義から，$i + j \neq 0$ のとき，$K(d_i(\theta), d_j(\theta)) = 0$ が成り立つ．すなわち，$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=-k}^{k} d_i(\theta)$ が成り立つ．このとき，$\mathfrak{l}_\theta := d_0(\theta)$ とおくと，$\mathfrak{l}_\theta$ は $d_1(\theta)$ に完全可約で作用する．したがって，Proposition 3.3 より，次の命題が成り立つ．

Proposition 4.4. $(\mathfrak{l}_\theta, \mathrm{ad}, d_1(\theta), K|_{\mathfrak{l}_\theta \times \mathfrak{l}_\theta})$ は standard quadruplet であり，それに付随する Lie 代数は $\mathfrak{g}$ に同型である．

ここで，standard quadruplet に付随する Lie 代数の直和に関して次が成り立つ．これも Proposition 3.3 を使って証明できる．

Definition 4.5. $(\mathfrak{g}^1, \rho^1, V^1, B_0^1)$ と $(\mathfrak{g}^2, \rho^2, V^2, B_0^2)$ を standard quadruplet とする．$a^i \in \mathfrak{g}^i$ と $v^i \in \mathfrak{g}^i$ $(i = 1, 2)$ に対し，$\rho^1 \boxplus \rho^2$ を

$$\big((\rho^1 \boxplus \rho^2)(a^1, a^2)\big)(v^1, v^2) := (\rho^1(a^1)v^1, \rho^2(a^2)v^2)$$

で定義される $\mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2$ の $V^1 \oplus V^2$ 上の表現とし，$a^i, b^i \in \mathfrak{g}^i$ $(i = 1, 2)$ に対して $B_0^1 \oplus B_0^2$ を

$$(B_0^1 \oplus B_0^2)((a^1, a^2), (b^1, b^2)) := B_0^1(a^1, b^1) + B_0^2(a^2, b^2)$$

で定義される $\mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2$ 上の二次形式とする．このとき，$(\mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2, \rho^1 \boxplus \rho^2, V^1 \oplus V^2, B_0^1 \oplus B_0^2)$ は standard quadruplet であり，これを $(\mathfrak{g}^1, \rho^1, V^1, B_0^1)$ と $(\mathfrak{g}^2, \rho^2, V^2, B_0^2)$ の直和と呼ぶ．これを $(\mathfrak{g}^1, \rho^1, V^1, B_0^1) \oplus (\mathfrak{g}^2, \rho^2, V^2, B_0^2)$ という記号で表す．

Proposition 4.6. $(\mathfrak{g}^1, \rho^1, V^1, B_0^1) \oplus (\mathfrak{g}^2, \rho^2, V^2, B_0^2)$ という standard quadruplet に付随する Lie 代数は，$(\mathfrak{g}^1, \rho^1, V^1, B_0^1)$ と $(\mathfrak{g}^2, \rho^2, V^2, B_0^2)$ に付随するそれらの直和になる．すなわち，

$$\begin{aligned} &L\big((\mathfrak{g}^1, \rho^1, V^1, B_0^1) \oplus (\mathfrak{g}^2, \rho^2, V^2, B_0^2)\big) \\ \simeq &L(\mathfrak{g}^1, \rho^1, V^1, B_0^1) \oplus L(\mathfrak{g}^2, \rho^2, V^2, B_0^2) \end{aligned}$$

が成り立つ．

こうして, 任意の半単純 Lie 代数が standard quadruplet に付随する Lie 代数として構成することができた. 一方, 次の命題が成り立つ.

Proposition 4.7. $(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ を standard quadruplet とする. これに付随する Lie 代数 $L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ が有限次元であるとき, $L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ は半単純 Lie 代数である.

すなわち, Proposition 3.3 の条件を満たす有限次元 Lie 代数に埋め込まれる簡約可能 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 及びその表現 (ρ, V) は [Ru–1] にてすでに分類されている.

最後にもう一つ, 有限次元単純 Lie 代数から standard quadruplet 及びそれに付随する Lie 代数の例を紹介しよう. 前節の記号を引き続き使用し, 新たに次の記号を定義する:

$$\tilde{d}_i := \begin{cases} d_{-k}(\theta) \oplus d_0(\theta) \oplus d_k(\theta) & (i = 0) \\ d_{-i}(\theta) \oplus d_{k-i}(\theta) & (i = 1, \ldots, k-1), \end{cases} \tag{4.7}$$

$$\tilde{\mathfrak{l}}_\theta := \tilde{d}_0(\theta). \tag{4.8}$$

このとき, $\tilde{\mathfrak{l}}_\theta$ は簡約可能 Lie 代数であり, adjoint 表現で $\tilde{d}_1(\theta)$ に自然に作用する. これは完全可約な表現である. また, $i + j \not\equiv 0 \pmod k$ のとき, $K(\tilde{d}_i(\theta), \tilde{d}_j(\theta)) = 0$ である. 任意の整数 n に対し, $n = kq + r$ $(q \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < k)$ となる r をとり, $\overline{d}_n(\theta) := \mathbb{C}t^n \otimes \tilde{d}_r(\theta)$ とおくと, 次数つき Lie 代数

$$\overline{\mathfrak{g}} := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{d}_n(\theta), \tag{4.9}$$

$$[t^n \otimes x, t^m \otimes y] := t^{n+m} \otimes [x, y] \tag{4.10}$$

およびその上の二次形式

$$\overline{K}(t^n \otimes x, t^m \otimes y) := \delta_{n+m,0} K(x, y) \tag{4.11}$$

が得られる. 特に $\overline{d}_{n+k}(\theta) \simeq \overline{d}_n(\theta)$ が成り立つ. これらは Proposition 3.3 の条件を満たすので, $(\tilde{\mathfrak{l}}_\theta, \mathrm{ad}, \tilde{d}_1(\theta), K|_{\tilde{\mathfrak{l}}_\theta \times \tilde{\mathfrak{l}}_\theta})$ は $(\overline{d}_0(\theta), \mathrm{ad}, \overline{d}_1(\theta), \overline{K}|_{\overline{d}_0(\theta) \times \overline{d}_0(\theta)})$ に同値な standard quadruplet であり, それに付随する Lie 代数は $\overline{\mathfrak{g}}$ に同型である.

Example 4.8. $\mathfrak{so}_m$ の m 次元自然表現を Λ_1 で表し, K_m を $\mathfrak{so}_m$ 上の Killing 形式とする. このとき, $N, M \geq 3$ に対し, $(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0) = (\mathfrak{so}_N \oplus \mathfrak{so}_M, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, M(N, M), K_N \oplus K_M)$ は standard quadruplet であり, その n-graduation は

$$V_n \simeq \begin{cases} \mathfrak{g} & (n \text{ が偶数}) \\ M(N, M) & (n \text{ が奇数}) \end{cases} \tag{4.12}$$

で与えられる. $L(\mathfrak{g},\rho,V,B_0)$ を行列の形で表すと

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & a_0 & X_1 & a_2 & X_3 & \\ & \xi_{-1} & b_0 & {}^tX_1 & b_2 & \\ & a_{-2} & {}^t\xi_{-1} & a_0 & X_1 & \\ & \xi_{-3} & b_{-2} & \xi_{-1} & b_0 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

という形の, サイズが無限の行列になる. ただし, 非負整数 i に対して $a_{\pm 2i} \in \mathfrak{so}_N$, $b_{\pm 2i} \in \mathfrak{so}_M$, $X_{2i+1} \in M_{N,M}$, $\xi_{-2i-1} \in M_{M,N}$ である.

これは, N, M のうち一つが奇数, 一つが偶数であれば, $B_{\frac{N+M-1}{2}}$, N, M がともに偶数であれば $D_{\frac{N+M}{2}}$ 型の単純 Lie 代数から前述の方法で得られるが, N, M がともに奇数であるときは, $L(\tilde{\mathfrak{l}}_\theta, \mathrm{ad}, \tilde{d}_1(\theta), K|_{\tilde{\mathfrak{v}}_\theta\times\tilde{\mathfrak{v}}_\theta})$ の形で表すことはできない.

参考文献

[Bu–1] N. Bourbaki, Lie groups and Lie algebras Chapters 1-3 , Springer-Verlag 1989.

[Bu–2] N. Bourbaki, Lie groups and Lie algebras Chapters 4-6 , Springer-Verlag 2002.

[Bu–3] N. Bourbaki, Lie groups and Lie algebras Chapters 7-9 , Springer-Verlag 2005.

[Ka] V.G.Kac, Infinite dimensional Lie algebras, third edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[K–A] S. Kaneyuki and H. Asano, Graded Lie algebras and generalized Jordan triple systems, Nagoya Math. J. vol 112., 1988, 81–115

[Ru–1] H. Rubenthaler, Espaces préhomogènes de type parabolique, Lect. Math. Kyoto Univ. 14, 1982, 189–221.

[Ru–2] H. Rubenthaler, Espaces préhomogènes de type parabolique, Thèse d'Etat, Université de Strasbourg, 1982.

[Ru–3] H. Rubenthaler, Algèbres de Lie et espaces préhomogènes, Travaux en cours, Hermann, Paris, 1992.

[S–K] M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, Nagoya Math. J. **65** (1977), 1–155.